Краткие сообщения ОИЯИ №18-86 *JINR Rapid Communications No.18-86*
УДК 530.145

АДРОННЫЙ АТОМ В МОДЕЛИ ЛИ

В.Б.Беляев, О.П.Соловцова

Рассмотрена модель адронного атома, в котором сильное взаимодействие описывается в рамках модели Ли. Обсуждается применимость формулы Дезера для сдвига уровня в таком атоме. Показано, что существует область значений масс частиц, в которой формула Дезера неприменима.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Hadronic Atom in the Lee Model

V.B.Belyaev, O.P.Solovtsova

The hadronic atom model is considered. The strong interaction of light particle with "nuclei" is described by the Lee model. The applicability of Deser's formula for the energy shift in such an atom is discussed. It is shown that for some relation between mass of the particles involved the Deser formula is violated.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

1. *Введение*

Адронные атомы до сих пор являются одной из уникальных систем, позволяющих исследовать сильное взаимодействие заряженных адронов при низкой энергии. При анализе экспериментальных данных по сдвигам и ширинам адронных атомов обычно используется формула Дезера/1/, связывающая линейной зависимостью измеряемые величины с характеристиками рассеяния, т.е. просто с комплексной длиной рассеяния. Однако даже в рамках чисто потенциального описания сильного взаимодействия известны случаи, когда формула Дезера перестает работать. Это происходит, например, когда имеет место так называемый "эффект Зельдовича"/2/, состоящий в перестройке кулоновского спектра адронного атома под влиянием сильного взаимодействия адронов, т.е. когда сильное взаимодействие нельзя рассматривать по теории возмущений.

Ниже рассматривается модель адронного атома, в котором сильное взаимодействие адронов имеет непотенциальный характер и описывается в рамках модели Ли [3]. При теоретико-полевом описании сильного взаимодействия в адронном атоме, кроме обычных вопросов применимости теории возмущений, в ряде моделей возникают специфические проблемы. Так, например, уже в рамках простейшей скалярной модели взаимодействия "мезонов" с фиксированным источником, как известно [4], вообще отсутствует связь между перенормировкой массы и характеристиками рассеяния.

2. *Потенциальная модель адронного атома*

Для удобства изложения получим сначала формулу Дезера в простой потенциальной модели. Пусть взаимодействие двух нерелятивистских частиц описывается гамильтонианом

$$H_{\text{пот}} = H_0 + H_1 + H_2, \qquad /1/$$

где H_0 - гамильтониан свободного движения; $H_1 = \lambda_1 |f\rangle\langle f|$ - - некоторое дальнодействующее притягивающее взаимодействие, имеющее сепарабельный вид, которое будем характеризовать константой связи λ_2 и формфактором $f(\vec{q})$; $H_2 = \lambda_2 |v\rangle\langle v|$ - добавочное короткодействующее "сильное" взаимодействие между рассматриваемыми частицами, характеризующееся λ_2 и $v(q)$.

Найдем энергию связанного состояния ϵ системы с гамильтонианом /1/. Уравнение для нахождения ϵ имеет вид

$$[1 - \lambda_1 \int d\vec{q}\, \frac{f^2(\vec{q})}{\epsilon - q^2/2\mu}][1 - \lambda_2 \int d\vec{q}\, \frac{v^2(\vec{q})}{\epsilon - q^2/2\mu}] - - \lambda_1 \lambda_2 [\int d\vec{q}\, \frac{f(\vec{q})\, v(\vec{q})}{\epsilon - q^2/2\mu}]^2 = 0, \qquad /2/$$

где μ - приведенная масса системы; $\epsilon = -a^2/2\mu$.

Выберем формфакторы взаимодействия в виде, предложенном Ямагучи [5]:

$$f(\vec{q}) = \frac{1}{q^2 + \beta^2}, \qquad /3/$$

$$v(\vec{q}) = \frac{1}{q^2 + \gamma^2}, \qquad /4/$$

где параметры β и γ характеризуют протяженности взаимодействий, и сделаем предположение

$$\beta << a << \gamma, \qquad /5/$$

означающее, что второе взаимодействие является короткодействующим по сравнению с первым. Тогда уравнение /2/ можно переписать в виде

$$1 + \bar{\lambda}_1 \frac{1}{2\beta a^2} - \frac{\bar{\lambda}_1 \bar{\lambda}_2}{a^2 \gamma^4} \cdot \frac{1}{1 + \bar{\lambda}_2 / 2\gamma^3} = 0, \qquad /6/$$

$(\bar{\lambda}_i \equiv 4\pi^2 \mu \lambda_i, \quad i = 1, 2)$,

из которого находим

$$a^2 = a_0^2 - \frac{2\beta a_0^2}{\gamma^4} \cdot \frac{\bar{\lambda}_2}{1 + \bar{\lambda}_2 / 2\gamma^3}, \qquad /7/$$

где $a_0^2 \equiv 2\mu\epsilon^0$, $\epsilon^0 \equiv \epsilon(\lambda_1, \lambda_2 = 0)$.
Сдвиг уровня Δ равен

$$\Delta \equiv \frac{a^2 - a_0^2}{2\mu} = -\frac{\beta a_0^2}{\mu \gamma^4} \cdot \frac{\bar{\lambda}_2}{1 + \bar{\lambda}_2 / 2\gamma^3}, \qquad /8/$$

или, с учетом того, что волновая функция системы при $\lambda_2 = 0$ в точке $r = 0$ равна $(4\pi^2 a_0^2 \beta^2)^{1/2}$, а выражение $\lambda_2(1 + \bar{\lambda}_2/2\gamma^3)^{-1}$ есть t-матрица при нулевой энергии, получаем формулу Дезера

$$\Delta = -|\Psi_1(0)|^2 \langle 0 | t_2(0) | 0 \rangle . \qquad /9/$$

3. *Теоретико-полевая модель адронного атома*

Рассмотрим теперь теоретико-полевую модель, описывающую взаимодействие двух фермионов A и B с бозоном a с помощью гамильтониана

$$H = H_0 + H_1 + H_2, \qquad /10/$$

где

$$H_0 = m_A^0 A^+ A + m_B^0 B^+ B + \int d\vec{q}\, \omega_q a^+_{\vec{q}} a_{\vec{q}}, \qquad /11/$$

$$H_1 = \lambda \int d\vec{q}_1 f(\vec{q}_1) \int d\vec{q}_2 f(\vec{q}_2) A^+ a^+_{\vec{q}_1} A a_{\vec{q}_2}, \qquad /12/$$

$$H_2 = g \int d\vec{k}\, v(\vec{k}) (A^+ B a_{\vec{k}} + B^+ A a^+_{\vec{k}}). \qquad /13/$$

$A^+(A)$, $B^+(B)$ - операторы рождения /уничтожения/ фермионов A и B, $a^+_{\vec{k}}(a_{\vec{k}})$ - оператор рождения /уничтожения/ бозона a с импульсом $\vec{k}$, m_A^0, m_B^0, μ_a-массы невзаимодействующих частиц A, B, a соответственно, $\omega_k = \sqrt{k^2 + \mu_a^2}$, $f(\vec{k})$ и $v(\vec{k})$ - некоторые функции импульсов, достаточно быстро спадающие при больших k.

Гамильтониан H_1 в виде /12/ описывает билинейное взаимодействие [6] между частицами aA , а гамильтониан /13/ - взаимодействие в модели Ли [3], разрешающее процессы $a+A \rightleftarrows B$.

Найдем собственные значения M гамильтониана /10/, т.е. решим уравнение

$$H|M) = M|M). \qquad /14/$$

Для этого собственный вектор $|M)$ представим в виде

$$|M) = N[\int d\vec{k}\, \Psi(\vec{k}) A^+ a^+_{\vec{k}} |0> + bB^+|0>], \qquad /15/$$

где N и b - нормировочные константы, $|0>$ - вакуумный вектор.

Подставляя /10/ и /15/ в /14/, получаем систему уравнений

$$(M - m^o_A - \omega_k)\Psi(\vec{k}) = \lambda f(\vec{k}) \int d\vec{q}\, f(\vec{q})\Psi(\vec{q}) + bgv(\vec{k}), \qquad /16/$$

$$b(M - m^o_B) = g\int d\vec{k}\, v(\vec{k})\Psi(\vec{k}). \qquad /17/$$

Прежде чем исследовать эту систему, рассмотрим предел $g \to 0$, соответствующий выключению "сильного" взаимодействия. В этом пределе из уравнения /17/ следует, что $b = 0$, тогда уравнение /16/ становится однородным:

$$(M_o - m^o_A - \omega_k)\Psi_o(\vec{k}) = \lambda f(\vec{k}) \int d\vec{q}\, f(\vec{q})\, \Psi_o(\vec{q}), \qquad /18/$$

где $M_o = M(\lambda, g = 0)$, $\Psi_o(\vec{k}) = \Psi(\vec{k})$ при $g = 0$.

Решение уравнения /18/ имеет вид

$$\Psi_o(\vec{k}) = \frac{\mathrm{const}\, f(\vec{k})}{M_o - m^o_A - \omega_k}. \qquad /19/$$

Подставляя /19/ в /18/, получаем уравнение для нахождения M_o:

$$\lambda^{-1} = \int d\vec{q}\, \frac{|f(\vec{q})|^2}{M_o - m^o_A - \omega_q}, \qquad /20/$$

из которого следует, что при $\lambda < 0$ в aA -системе возможно связанное состояние.

Далее будем считать a-частицу нерелятивистской и более легкой, чем частицы A и B. Тогда имеем

$$\omega_k = \sqrt{k^2 + \mu^2_a} \simeq \mu_a + \frac{k^2}{2\mu_a}, \qquad /21/$$

и собственное значение M_o можно представить в виде

$$M_o = m^o_A + \mu_a - \frac{a^2_o}{2\mu_a}, \qquad /22/$$

где a_0 имеет тот же физический смысл, что и в выражении /7/.

Отметим, что система уравнений /16/-/17/ в пределе $\lambda = 0$, $g \neq 0$ переходит в систему уравнений для модели Ли, из которой следует, что $M = m_B$, где m_B-масса физической B-частицы.

Таким образом, рассматриваемая теоретико-полевая модель, описываемая гамильтонианом /10/, позволяет исследовать вопрос о том, как изменяется энергия связанного состояния в aA-системе, если между этими частицами действует дополнительное взаимодействие в виде /13/ (см. рис.1).

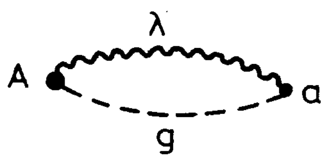

Рис.1. Волнистая линия соответствует билинейному "дальнодействующему" взаимодействию, пунктирная - "короткодействующему" взаимодействию, описываемому моделью Ли.

Представим функцию $\Psi(\vec{k})$, входящую в уравнения /16/, /17/, в виде

$$\Psi(\vec{k}) = b\,\frac{\lambda C(\lambda,g) f(\vec{k}) + g v(\vec{k})}{M - m_A^o - \omega_k}, \qquad /23/$$

где $C(\lambda,g) \equiv \int d\vec{q}\, f(\vec{q})\Psi(\vec{q})$, и подставим в эти уравнения. Тогда получим следующее уравнение для M:

$$(M - m_B^o)\Big(1 - \lambda \int d\vec{q}\, \frac{f^2(\vec{q})}{M - m_A^o - \omega_q}\Big) =$$

$$= g^2\Big\{\lambda\Big[\int d\vec{q}\, \frac{f(\vec{q}) v(\vec{q})}{M - m_A^o - \omega_q}\Big]^2 + \Big(\int d\vec{q}\, \frac{v^2(\vec{q})}{M - m_A^o - \omega_q}\Big)\Big(1 - \lambda \int \frac{d\vec{q}\, f^2(\vec{q})}{M - m_A^o - \omega_q}\Big)\Big\}. \qquad /24/$$

Так же, как в потенциальной модели, будем считать, что функции $f(\vec{q})$ и $v(\vec{q})$ имеют вид /3/ и /4/ соответственно. Тогда уравнение /24/ перепишется так:

$$\Big[-\frac{a^2}{2\mu_a} + m_A^o + \mu_a - m_B^o + \frac{g^2}{2\gamma(a+\gamma)^2}\Big] = \tilde{g}^2 \tilde{\lambda}[(\gamma+\beta)(a+\gamma)(a+\beta)]^{-2}, \qquad /25/$$

где M представлено в виде $M \equiv m_A^o + \mu_a - a^2/2\mu_a$, $\tilde{\lambda} \equiv 4\pi^2 \mu_a \lambda$, $\tilde{g}^2 \equiv 4\pi^2 \mu_a g^2$.

Если выполнимо условие /5/, то уравнение /25/, которое является точным для рассматриваемых взаимодействий, переходит в уравнение

$$\left(-\frac{a^2}{2\mu_a} + m_A^o + \mu_a - m_B^o\right)\left(1 + \frac{\bar{\lambda}}{2\mu_a a^2}\right) - \frac{\vec{g}^2\bar{\lambda}}{\gamma^4 a^2} = 0, \qquad /26/$$

из которого легко находятся два значения a^2. Тогда для M получаем

$$M = M_0 - \Delta, \qquad /27/$$

$$\Delta = \frac{M_0 - m_B}{2} \pm \frac{M_0 - m_B}{2}\sqrt{1 + \frac{4\vec{g}^2\beta a_0^2}{\gamma^4\mu_a(m_B - M_0)^2}}\,. \qquad /28/$$

Таким образом, два значения M_1 и M_2 в приближении /5/ удовлетворяют уравнению /24/:

$$M_{1,2} = \frac{M_0 + m_B}{2} \pm \frac{M_0 - m_B}{2}\sqrt{1 + \frac{4\tilde{g}^2\beta a_0^2}{\gamma^4\mu_a(m_B - M_0)^2}}\,. \qquad /29/$$

При малых $\bar{g}^2$ из /29/ следует /см.рис.2/

$$M_1 \to M_0 + \bar{g}^2\frac{\beta a_0^2}{\gamma^4\mu_a(M_0 - m_B)}, \qquad /30/$$

$$M_2 \to m_B - \bar{g}^2\frac{\beta a_0^2}{\gamma^4\mu_a(M_0 - m_B)}. \qquad /31/$$

Выражение $g^2[\gamma^4(M_0 - m_B)]^{-1}$ в приближении $a_0 \ll \gamma$ можно считать t-матрицей при нулевой энергии, описывающей рассеяние частицы a на A в модели Ли, поэтому из /30/ следует выражение для сдвига уровня:

$$\Delta_1 = -(M_1 - M_0) = -|\Psi_1(0)|^2 \langle 0|t_2(0)|0\rangle, \qquad /32/$$

где $\Psi_1(0) = (4\pi a_0^2\beta)^{1/2}$, которое совпадает с формулой Дезера /см. выражение /9//. В то же время, как следует из /31/, сдвиг другого уровня не воспроизводится формулой Дезера даже при малых $\bar{g}^2$, поскольку определяется массой m_B, являющейся независимым параметром рассматриваемой модели.

4. *Заключение*

Итак, рассмотренная теоретико-полевая модель приводит к более сложной картине сдвига уровня по сравнению с потенциальным подходом. В частности, в системе возникают два уровня, один из которых имеет потенциальный аналог,

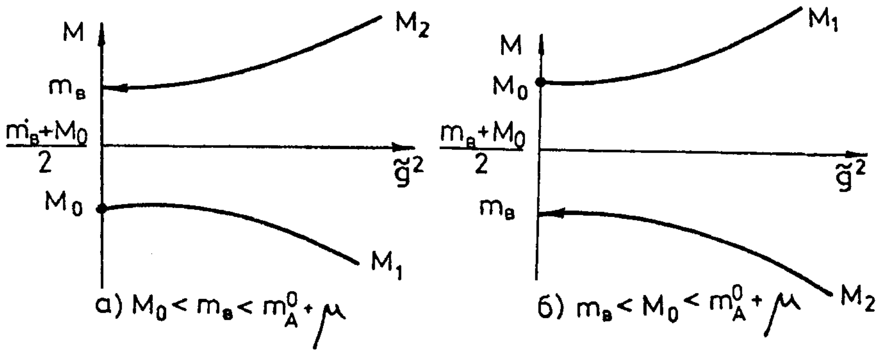

Рис.2. Зависимость энергии системы M от константы связи $\hat{g}^2$ при малых $\hat{g}^2$ при условии $M_0 < m_B < m_A^0 + \mu_a$ /а/ и $m_B < M_0 < m_A^0 + \mu_a$ /б/.

а второй связан с непотенциальным характером "сильного" взаимодействия. В зависимости от соотношения параметров M_0 и m_B теоретико-полевой подход может дать для сдвига уровня результат либо близкий к потенциальному подходу /см. рис.2а/, либо существенно отличающийся от него /см. рис.2б/. Последнее имеет место, если $M_0 > m_B$. Тогда после включения "сильного" взаимодействия системе энергетически выгоднее занять уровень, возникающий исключительно из-за непотенциальных эффектов. Заметим, что в этом случае не выполняется простое соотношение /9/ (формула Дезера), связывающее длину рассеяния со сдвигом уровня Δ. Ответ на вопрос, какая ситуация реализуется в действительности, может дать более реалистичная теоретико-полевая модель адронного атома, параметры которой можно будет фиксировать по характеристикам реальных взаимодействий /для случая π-мезоатомов с использованием гамильтониана Чу - Лоу этот вопрос исследовался в работе [7], где формула Дезера оказалась применимой/.

Литература

1. Deser S. et al., Phys.Rev., 1954, 96, p.774.
2. Зельдович Я.Б. ФТТ, 1959, 1, с.1637.
3. Lee T.D. Phys.Rev., 1954, 95, p.1329.
4. Швебер С. Введение в релятивистскую теорию поля. ИИЛ, М., 1963.
5. Yamaguchi Y. Phys.Rev., 1954, 95, p.1628.
6. Хенли Э., Тирринг В., Элементарная квантовая теория поля. ИИЛ, М., 1963.
7. Мещеряков В.А. ЖЭТФ, 1958, 35, с.290.

Рукопись поступила в издательский отдел
18 июня 1986 года.